Kompleksna analiza

Pavle Pandžić, 5. predavanje

Konvergencija nizova i redova funkcija

U ovom dijelu kolegija najprije ćemo pokazati kako se holomorfne funkcije mogu zadati kao redovi potencija.

Konvergencija nizova i redova funkcija

U ovom dijelu kolegija najprije ćemo pokazati kako se holomorfne funkcije mogu zadati kao redovi potencija.

Zatim ćemo vidjeti da se svaka holomorfna funkcija može razviti u Taylorov red oko svake točke domene.

Konvergencija nizova i redova funkcija

U ovom dijelu kolegija najprije ćemo pokazati kako se holomorfne funkcije mogu zadati kao redovi potencija.

Zatim ćemo vidjeti da se svaka holomorfna funkcija može razviti u Taylorov red oko svake točke domene.

Neka je $S \subseteq \mathbb{C}$, $f_n : S \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz funkcija i $f : S \to \mathbb{C}$.

Kažemo da niz (f_n) **konvergira prema funkciji** f **po točkama** ili **obično** ako niz brojeva $(f_n(z))_n$ konverira k $f(z)$ za svaki $z \in S$.

Kažemo da niz (f_n) **konvergira prema funkciji f po točkama** ili **obično** ako niz brojeva $(f_n(z))_n$ konverira k $f(z)$ za svaki $z \in S$.

Drugim riječima, ako za svaki $z \in S$ te svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$.

Kažemo da niz (f_n) **konvergira prema funkciji** f **po točkama** ili **obično** ako niz brojeva $(f_n(z))_n$ konverira k $f(z)$ za svaki $z \in S$.

Drugim riječima, ako za svaki $z \in S$ te svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$.

Uočite da u ovoj definiciji n_0 ovisi o ϵ i o z.

Kažemo da niz (f_n) **konvergira prema funkciji** f **po točkama** ili **obično** ako niz brojeva $(f_n(z))_n$ konverira k $f(z)$ za svaki $z \in S$.

Drugim riječima, ako za svaki $z \in S$ te svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$.

Uočite da u ovoj definiciji n_0 ovisi o ϵ i o z.

Kažemo da niz (f_n) **konvergira prema funkciji** f **uniformno na S** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$ i sve $z \in S$.

Kažemo da niz (f_n) **konvergira prema funkciji f po točkama** ili **obično** ako niz brojeva $(f_n(z))_n$ konverira k $f(z)$ za svaki $z \in S$.

Drugim riječima, ako za svaki $z \in S$ te svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$.

Uočite da u ovoj definiciji n_0 ovisi o ϵ i o z.

Kažemo da niz (f_n) **konvergira prema funkciji f uniformno na S** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$ i sve $z \in S$.

Uočite da u ovoj definiciji n_0 ovisi samo o ϵ, a ne ovisi o z.

Kažemo da niz (f_n) **konvergira prema funkciji** f **po točkama** ili **obično** ako niz brojeva $(f_n(z))_n$ konverira k $f(z)$ za svaki $z \in S$.

Drugim riječima, ako za svaki $z \in S$ te svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$.

Uočite da u ovoj definiciji n_0 ovisi o ϵ i o z.

Kažemo da niz (f_n) **konvergira prema funkciji** f **uniformno na S** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$ i sve $z \in S$.

Uočite da u ovoj definiciji n_0 ovisi samo o ϵ, a ne ovisi o z.

Pišemo $f_n \rightrightarrows f$.

Obična konvergencija nije adekvatna za naše potrebe jer se dobra svojstva funkcija f_n kao što su neprekidnost ili holomorfnost ne prenose na limes f.

Obična konvergencija nije adekvatna za naše potrebe jer se dobra svojstva funkcija f_n kao što su neprekidnost ili holomorfnost ne prenose na limes f.

Kod uniformne konvergencije dobra svojstva funkcija f_n prenosi se na limes f. Međutim naši glavni primjeri, redovi potencija, ne konvergiraju uniformno na skupu na kojem konvergiraju.

Obična konvergencija nije adekvatna za naše potrebe jer se dobra svojstva funkcija f_n kao što su neprekidnost ili holomorfnost ne prenose na limes f.

Kod uniformne konvergencije dobra svojstva funkcija f_n prenosi se na limes f. Međutim naši glavni primjeri, redovi potencija, ne konvergiraju uniformno na skupu na kojem konvergiraju.

Pojam koji je idealan za našu svrhu je lokalno uniformna konvergencija, koja je između obične i uniformne konvergencije.

Obična konvergencija nije adekvatna za naše potrebe jer se dobra svojstva funkcija f_n kao što su neprekidnost ili holomorfnost ne prenose na limes f.

Kod uniformne konvergencije dobra svojstva funkcija f_n prenosi se na limes f. Međutim naši glavni primjeri, redovi potencija, ne konvergiraju uniformno na skupu na kojem konvergiraju.

Pojam koji je idealan za našu svrhu je lokalno uniformna konvergencija, koja je između obične i uniformne konvergencije.

Kod lokalno uniformne konvergencije, dobra se svojstva funkcija f_n prenose na limes f, a također glavni primjeri, redovi potencija, konvergiraju lokalno uniformno na skupu na kojem konvergiraju.

Definicija lokalno uniformne konvergencije

Kažemo da niz (f_n) **konvergira prema funkciji** f **lokalno uniformno na S** ako za svaki $z \in S$ postoji $r_z > 0$ takav da je $K(z, r_z) \subseteq S$ i da niz funkcija $(f_n|_{K(z,r_z)})_n$ uniformno konvergira funkciji $f|_{K(z,r_z)}$.

Definicija lokalno uniformne konvergencije

Kažemo da niz (f_n) **konvergira prema funkciji** f **lokalno uniformno na S** ako za svaki $z \in S$ postoji $r_z > 0$ takav da je $K(z, r_z) \subseteq S$ i da niz funkcija $(f_n|_{K(z,r_z)})_n$ uniformno konvergira funkciji $f|_{K(z,r_z)}$.

Pišemo $f_n \xrightarrow{L.U.} f$.

Teorem (karakterizacija lokalno uniformne konvergencije)

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

Teorem (karakterizacija lokalno uniformne konvergencije)

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

1. $f_n \xrightarrow{L.U.} f$;

Teorem (karakterizacija lokalno uniformne konvergencije)

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

1. $f_n \xrightarrow{L.U.} f$;
2. za svaki kompaktan podskup K od Ω vrijedi $f_n|_K \rightrightarrows f|_K$;

Teorem (karakterizacija lokalno uniformne konvergencije)

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

1. $f_n \xrightarrow{L.U.} f$;
2. za svaki kompaktan podskup K od Ω vrijedi $f_n|_K \rightrightarrows f|_K$;
3. za svaki $\overline{K(z,r)} \subseteq \Omega$ vrijedi $f_n|_{\overline{K(z,r)}} \rightrightarrows f|_{\overline{K(z,r)}}$.

Dokaz

(1)$\Rightarrow$(2)

Dokaz

(1)$\Rightarrow$(2)

Iz pretpostavke slijedi da za svaki $z \in \Omega$ postoji $r_z > 0$ tako da $(f_n|_{K(z,r_z)})_n$ uniformno konvergira funkciji $f|_{K(z,r_z)}$.

Dokaz

(1)$\Rightarrow$(2)

Iz pretpostavke slijedi da za svaki $z \in \Omega$ postoji $r_z > 0$ tako da $(f_n|_{K(z,r_z)})_n$ uniformno konvergira funkciji $f|_{K(z,r_z)}$.

Uočimo da je skup

$$\{K(z, r_z) : z \in K\}$$

otvoreni pokrivač kompaktnog skupa K, pa postoje $z_1, \dots, z_k \in K$ tako da je

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} K(z_i, r_{z_i}).$$

Za svaki $i = 1, \ldots, k$ niz $(f_n|_{K(z_i, r_{z_i})})_n$ uniformno konvergira funkciji $f|_{K(z, r_z)}$, te stoga postoje $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ takvi da, za dani $\varepsilon > 0$, vrijedi:

$$n \geq n_i \Rightarrow (|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in K(z_i, r_{z_i})).$$

Za svaki $i = 1, \ldots, k$ niz $(f_n|_{K(z_i, r_{z_i})})_n$ uniformno konvergira funkciji $f|_{K(z, r_z)}$, te stoga postoje $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ takvi da, za dani $\varepsilon > 0$, vrijedi:

$$n \geq n_i \Rightarrow (|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in K(z_i, r_{z_i})).$$

Ako je $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ tada

$$n \geq n_0 \Rightarrow (|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in \bigcup_{i=1}^{k} K(z_i, r_{z_i})).$$

Za svaki $i = 1, \dots, k$ niz $(f_n|_{K(z_i, r_{z_i})})_n$ uniformno konvergira funkciji $f|_{K(z, r_z)}$, te stoga postoje $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ takvi da, za dani $\varepsilon > 0$, vrijedi:

$$n \geq n_i \Rightarrow (|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in K(z_i, r_{z_i})).$$

Ako je $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ tada

$$n \geq n_0 \Rightarrow (|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in \bigcup_{i=1}^{k} K(z_i, r_{z_i})).$$

Kako je $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} K(z_i, r_{z_i})$, imamo

$$n \geq n_0 \Rightarrow (|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in K).$$

Za svaki $i = 1, \ldots, k$ niz $(f_n|_{K(z_i, r_{z_i})})_n$ uniformno konvergira funkciji $f|_{K(z, r_z)}$, te stoga postoje $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ takvi da, za dani $\varepsilon > 0$, vrijedi:

$$n \geq n_i \Rightarrow (|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in K(z_i, r_{z_i})).$$

Ako je $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ tada

$$n \geq n_0 \Rightarrow (|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in \bigcup_{i=1}^{k} K(z_i, r_{z_i})).$$

Kako je $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} K(z_i, r_{z_i})$, imamo

$$n \geq n_0 \Rightarrow (|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \forall z \in K).$$

Slijedi (2).
Ostale implikacije su očite. $\square$

Teorem (o neprekidnosti lokalno uniformnog limesa)

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz neprekidnih funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da $f_n \xrightarrow{L.U.} f$.

Teorem (o neprekidnosti lokalno uniformnog limesa)

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz neprekidnih funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da $f_n \xrightarrow{L.U.} f$.

Tada je f neprekidna funkcija.

Teorem (o neprekidnosti lokalno uniformnog limesa)

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz neprekidnih funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da $f_n \xrightarrow{L.U.} f$.

Tada je f neprekidna funkcija.

Dokaz. Uzmimo $z_0 \in \Omega$ i pokažimo da je f neprekidna u z_0.

Teorem (o neprekidnosti lokalno uniformnog limesa)

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz neprekidnih funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da $f_n \xrightarrow{L.U.} f$.

Tada je f neprekidna funkcija.

Dokaz. Uzmimo $z_0 \in \Omega$ i pokažimo da je f neprekidna u z_0.

Neka je $\varepsilon > 0$. Trebamo naći $\delta > 0$ tako da je $K(z_0, \delta) \subseteq \Omega$ i da za $z \in K(z_0, \delta)$ vrijedi $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Iz $f_n \xrightarrow{L.U.} f$ slijedi da postoji $r > 0$ tako da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ i da $f_n|_{K(z,r)} \rightrightarrows f|_{K(z,r)}$.

Iz $f_n \xrightarrow{L.U.} f$ slijedi da postoji $r > 0$ tako da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ i da $f_n|_{K(z,r)} \rightrightarrows f|_{K(z,r)}$.

Dakle, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ za sve $z \in K(z_0, r)$.

Iz $f_n \xrightarrow{L.U.} f$ slijedi da postoji $r > 0$ tako da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ i da $f_n|_{K(z,r)} \rightrightarrows f|_{K(z,r)}$.

Dakle, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ za sve $z \in K(z_0, r)$.

Posebno za $n = n_0$ imamo

$$|f_{n_0}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall z \in K(z_0, r). \tag{1}$$

Iz $f_n \xrightarrow{L.U.} f$ slijedi da postoji $r > 0$ tako da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ i da $f_n|_{K(z,r)} \rightrightarrows f|_{K(z,r)}$.

Dakle, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ za sve $z \in K(z_0, r)$.

Posebno za $n = n_0$ imamo

$$|f_{n_0}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall z \in K(z_0, r). \tag{1}$$

Uvrštavanjem $z = z_0$ u (1) slijedi

$$|f_{n_0}(z_0) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

Kako je f_{n_0} neprekidna u z_0, postoji $\delta \in (0, r]$ takav da je

$$|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall z \in K(z_0, \delta). \tag{3}$$

Kako je f_{n_0} neprekidna u z_0, postoji $\delta \in (0, r]$ takav da je

$$|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall z \in K(z_0, \delta). \tag{3}$$

Konačno, iz (1), (2) i (3) slijedi da je za svaki $z \in K(z_0, \delta)$

$$|f(z) - f(z_0)| \leq$$
$$|f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| + |f_{n_0}(z) - f(z_0)| < \varepsilon. \qquad \square$$

Lema (o zamjeni limesa i integrala)

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz neprekidnih funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da $f_n \xrightarrow{L.U.} f$.

Lema (o zamjeni limesa i integrala)

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz neprekidnih funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da $f_n \xrightarrow{L.U.} f$.

Tada

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f$$

za svaki po dijelovima gladak put γ u Ω.

Lema (o zamjeni limesa i integrala)

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz neprekidnih funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da $f_n \xrightarrow{L.U.} f$.

Tada

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f$$

za svaki po dijelovima gladak put γ u Ω.

Dokaz. Neka je $\gamma : [a, b] \to \Omega$ po dijelovima gladak put u Ω. Označimo $K := \gamma([a, b])$. Neka je $\varepsilon > 0$.

Lema (o zamjeni limesa i integrala)

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz neprekidnih funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da $f_n \xrightarrow{L.U.} f$.

Tada

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f$$

za svaki po dijelovima gladak put γ u Ω.

Dokaz. Neka je $\gamma : [a, b] \to \Omega$ po dijelovima gladak put u Ω. Označimo $K := \gamma([a, b])$. Neka je $\varepsilon > 0$.

Prema prethodnoj tvrdnji, f je neprekidna funkcija, pa je izraz $\int_\gamma f$ dobro definiran.

Kako je K kompaktan skup, iz pretpostavke o lokalno uniformnoj konvergenciji i Teorema o karakterizaciji lokalno uniformne konvergencije slijedi $f_n|_K \rightrightarrows f|_K$.

Kako je K kompaktan skup, iz pretpostavke o lokalno uniformnoj konvergenciji i Teorema o karakterizaciji lokalno uniformne konvergencije slijedi $f_n|_K \rightrightarrows f|_K$.

Zato za zadani $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in K. \tag{4}$$

Kako je K kompaktan skup, iz pretpostavke o lokalno uniformnoj konvergenciji i Teorema o karakterizaciji lokalno uniformne konvergencije slijedi $f_n|_K \rightrightarrows f|_K$.

Zato za zadani $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in K. \tag{4}$$

Sada, koristeći Lemu o fundamentalnoj ocjeni integrala i (4), dobivamo

$$\left| \int_\gamma f_n - \int_\gamma f \right| = \left| \int_\gamma (f_n - f) \right| \leq$$
$$\max\{|(f_n - f)(z)| : z \in K\} \cdot \ell(\gamma) \leq \varepsilon \ell(\gamma).$$

Kako je K kompaktan skup, iz pretpostavke o lokalno uniformnoj konvergenciji i Teorema o karakterizaciji lokalno uniformne konvergencije slijedi $f_n|_K \rightrightarrows f|_K$.

Zato za zadani $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in K. \tag{4}$$

Sada, koristeći Lemu o fundamentalnoj ocjeni integrala i (4), dobivamo

$$\left| \int_\gamma f_n - \int_\gamma f \right| = \left| \int_\gamma (f_n - f) \right| \leq$$
$$\max\{|(f_n - f)(z)| : z \in K\} \cdot \ell(\gamma) \leq \varepsilon \ell(\gamma).$$

Slijedi tvrdnja. $\square$

Morerin teorem

Sljedeća činjenica koju želimo dokazati je holomorfnost lokalno uniformnog limesa niza holomorfnih funkcija (Weierstrassov teorem, niže dolje). Za to će nam trebati

Morerin teorem

Sljedeća činjenica koju želimo dokazati je holomorfnost lokalno uniformnog limesa niza holomorfnih funkcija (Weierstrassov teorem, niže dolje). Za to će nam trebati

Morerin teorem. Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija takva da za svaki trokut $\Delta \subseteq \Omega$ vrijedi $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

Morerin teorem

Sljedeća činjenica koju želimo dokazati je holomorfnost lokalno uniformnog limesa niza holomorfnih funkcija (Weierstrassov teorem, niže dolje). Za to će nam trebati

Morerin teorem. Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija takva da za svaki trokut $\Delta \subseteq \Omega$ vrijedi $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

Tada je f holomorfna na Ω.

Morerin teorem

Sljedeća činjenica koju želimo dokazati je holomorfnost lokalno uniformnog limesa niza holomorfnih funkcija (Weierstrassov teorem, niže dolje). Za to će nam trebati

Morerin teorem. Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija takva da za svaki trokut $\Delta \subseteq \Omega$ vrijedi $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

Tada je f holomorfna na Ω.

Dokaz. Neka je $z_0 \in \Omega$ i $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$.

Morerin teorem

Sljedeća činjenica koju želimo dokazati je holomorfnost lokalno uniformnog limesa niza holomorfnih funkcija (Weierstrassov teorem, niže dolje). Za to će nam trebati

Morerin teorem. Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija takva da za svaki trokut $\Delta \subseteq \Omega$ vrijedi $\int_{\partial\Delta} f = 0$.

Tada je f holomorfna na Ω.

Dokaz. Neka je $z_0 \in \Omega$ i $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$.

Ako je $g = f|_{K(z_0,r)} : K(z_0, r) \to \mathbb{C}$, tada iz pretpostavke slijedi $\int_{\partial\Delta} g = 0$ za sve $\Delta \subseteq K(z_0, r)$.

Sada se na isti način kao u dokazu Cauchyjevog teorema za zvjezdast skup dokaže da g ima primitivnu funkciju.

Sada se na isti način kao u dokazu Cauchyjevog teorema za zvjezdast skup dokaže da g ima primitivnu funkciju.

(Ono što je bilo potrebno u tom dokazu je upravo da je integral po rubu trokuta jednak 0; tamo smo to zaključili iz holomorfnosti i Goursat-Pringsheimovog teorema, a ovdje nam je to pretpostavka.)

Sada se na isti način kao u dokazu Cauchyjevog teorema za zvjezdast skup dokaže da g ima primitivnu funkciju.

(Ono što je bilo potrebno u tom dokazu je upravo da je integral po rubu trokuta jednak 0; tamo smo to zaključili iz holomorfnosti i Goursat-Pringsheimovog teorema, a ovdje nam je to pretpostavka.)

Dakle, postoji $G : K(z_0, r) \to \mathbb{C}$ tako da je $G'(z) = g(z)$ za sve $z \in K(z_0, r)$.

Sada se na isti način kao u dokazu Cauchyjevog teorema za zvjezdast skup dokaže da g ima primitivnu funkciju.

(Ono što je bilo potrebno u tom dokazu je upravo da je integral po rubu trokuta jednak 0; tamo smo to zaključili iz holomorfnosti i Goursat-Pringsheimovog teorema, a ovdje nam je to pretpostavka.)

Dakle, postoji $G : K(z_0, r) \to \mathbb{C}$ tako da je $G'(z) = g(z)$ za sve $z \in K(z_0, r)$.

Funkcija G je holomorfna na $K(z_0, r)$, pa je onda, prema generaliziranoj CIF, i $G' = g$ holomorfna na $K(z_0, r)$.

Sada se na isti način kao u dokazu Cauchyjevog teorema za zvjezdast skup dokaže da g ima primitivnu funkciju.

(Ono što je bilo potrebno u tom dokazu je upravo da je integral po rubu trokuta jednak 0; tamo smo to zaključili iz holomorfnosti i Goursat-Pringsheimovog teorema, a ovdje nam je to pretpostavka.)

Dakle, postoji $G : K(z_0, r) \to \mathbb{C}$ tako da je $G'(z) = g(z)$ za sve $z \in K(z_0, r)$.

Funkcija G je holomorfna na $K(z_0, r)$, pa je onda, prema generaliziranoj CIF, i $G' = g$ holomorfna na $K(z_0, r)$.

Slijedi da je f holomorfna na $K(z_0, r)$, a zbog proizvoljnosti od z_0 slijedi tvrdnja. $\square$

Weierstrassov teorem (o limesu niza holomorfnih funkcija)

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz holomorfnih funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da $f_n \xrightarrow{L.U.} f$.

Weierstrassov teorem (o limesu niza holomorfnih funkcija)

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz holomorfnih funkcija i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija takva da $f_n \xrightarrow{L.U.} f$.

Tada je f holomorfna na Ω i vrijedi

$$f_n^{(k)} \xrightarrow{L.U.} f^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dokaz

Prvo uočimo da je f neprekidna funkcija prema Teoremu o neprekidnosti lokalno uniformnog limesa.

Dokaz

Prvo uočimo da je f neprekidna funkcija prema Teoremu o neprekidnosti lokalno uniformnog limesa.

Kako su sve funkcije f_n holomorfne, prema Goursat–Pringsheimovom teoremu je

$$\int_{\partial\Delta} f_n = 0, \quad \forall\Delta \subseteq \Omega, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz

Prvo uočimo da je f neprekidna funkcija prema Teoremu o neprekidnosti lokalno uniformnog limesa.

Kako su sve funkcije f_n holomorfne, prema Goursat–Pringsheimovom teoremu je

$$\int_{\partial\Delta} f_n = 0, \quad \forall\Delta \subseteq \Omega, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sada Lema o zamjeni limesa i integrala povlači da je

$$\int_{\partial\Delta} f = 0, \quad \forall\Delta \subseteq \Omega,$$

pa je f holomorfna po Morerinom teoremu.

Nadalje, neka je $k \in \mathbb{N}$. Za neki $z_0 \in \Omega$ neka je $r > 0$ takav da je $\overline{K(z_0, r)} \subseteq \Omega$.

Nadalje, neka je $k \in \mathbb{N}$. Za neki $z_0 \in \Omega$ neka je $r > 0$ takav da je $\overline{K(z_0, r)} \subseteq \Omega$.

Neka je $\gamma : [0, 2\pi] \to \Omega, \gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

Nadalje, neka je $k \in \mathbb{N}$. Za neki $z_0 \in \Omega$ neka je $r > 0$ takav da je $\overline{K(z_0, r)} \subseteq \Omega$.

Neka je $\gamma : [0, 2\pi] \to \Omega, \gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

Prema generaliziranoj CIF za f_n i f imamo

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(w)}{(w - z)^{k+1}} dw, \quad \forall z \in K(z_0, r), \forall n \in \mathbb{N},$$

Nadalje, neka je $k \in \mathbb{N}$. Za neki $z_0 \in \Omega$ neka je $r > 0$ takav da je $\overline{K(z_0, r)} \subseteq \Omega$.

Neka je $\gamma : [0, 2\pi] \to \Omega, \gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

Prema generaliziranoj CIF za f_n i f imamo

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(w)}{(w - z)^{k+1}} dw, \quad \forall z \in K(z_0, r), \forall n \in \mathbb{N},$$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{k+1}} dw, \quad \forall z \in K(z_0, r).$$

Primjenom leme o fundamentalnoj ocjeni integrala slijedi

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| = \left|\frac{k!}{2\pi i}\right| \cdot \left|\int_\gamma \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw\right|$$

Primjenom leme o fundamentalnoj ocjeni integrala slijedi

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| = \left|\frac{k!}{2\pi i}\right| \cdot \left|\int_\gamma \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw\right|$$

$$\leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \max\{\frac{|f_n(w) - f(w)|}{|w-z|^{k+1}} : w \in \gamma([0, 2\pi])\} \cdot \ell(\gamma).$$

Primjenom leme o fundamentalnoj ocjeni integrala slijedi

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| = \left|\frac{k!}{2\pi i}\right| \cdot \left|\int_\gamma \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw\right|$$

$$\leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \max\{\frac{|f_n(w) - f(w)|}{|w-z|^{k+1}} : w \in \gamma([0, 2\pi])\} \cdot \ell(\gamma).$$

Neka je $\rho \in (0, r)$. Za sve $z \in K(z_0, \rho)$ vrijedi

$$|w - z| \geq |w - z_0| - |z - z_0| > r - \rho > 0,$$

pa je

$$\frac{1}{|w-z|^{k+1}} < \frac{1}{(r-\rho)^{k+1}}, \quad \forall z \in K(z_0, \rho).$$

Sada je

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{2r\pi k!}{2\pi(r-\rho)^{k+1}} \cdot \max\{|f_n(w) - f(w)| : w \in \gamma([0, 2\pi])\}$$

za sve $z \in K(z_0, \rho)$.

Sada je

$$|f_n^{(k)}(z)-f^{(k)}(z)| \leq \frac{2r\pi k!}{2\pi(r-\rho)^{k+1}} \cdot \max\{|f_n(w)-f(w)| : w \in \gamma([0,2\pi])\}$$

za sve $z \in K(z_0, \rho)$.

Označimo li $M = \frac{2r\pi k!}{2\pi(r-\rho)^{k+1}} = \frac{rk!}{(r-\rho)^{k+1}}$, slijedi da za svaki $z \in K(z_0, \rho)$ vrijedi

$$|f_n^{(k)}(z)-f^{(k)}(z)| \leq M \cdot \max\{|f_n(w)-f(w)| : w \in \gamma([0,2\pi])\}. \quad (5)$$

Neka je $K = \gamma([0, 2\pi])$. Skup K je kompaktan, a $f_n \xrightarrow{L.U.} f$, pa zbog Teorema o karakterizaciji lokalno uniformne konvergencije slijedi $f_n|_K \rightrightarrows f|_K$.

Neka je $K = \gamma([0, 2\pi])$. Skup K je kompaktan, a $f_n \xrightarrow{L.U.} f$, pa zbog Teorema o karakterizaciji lokalno uniformne konvergencije slijedi $f_n|_K \rightrightarrows f|_K$.

Dakle za proizvoljno odabrani $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|f_n(w) - f(w)| < \varepsilon, \quad \forall w \in K, \forall n \geq n_0.$$

Slijedi da je

$$\max\{|f_n(w) - f(w)| : w \in K\} < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Slijedi da je

$$\max\{|f_n(w) - f(w)| : w \in K\} < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Iz (5) sada slijedi

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \varepsilon M, \quad \forall z \in K(z_0, \rho), \forall n \geq n_0,$$

Slijedi da je

$$\max\{|f_n(w) - f(w)| : w \in K\} < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Iz (5) sada slijedi

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \varepsilon M, \quad \forall z \in K(z_0, \rho), \forall n \geq n_0,$$

pa zaključujemo

$$f_n^{(k)}|_{K(z_0,\rho)} \rightrightarrows f^{(k)}|_{K(z_0,\rho)}.$$

Slijedi da je

$$\max\{|f_n(w) - f(w)| : w \in K\} < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Iz (5) sada slijedi

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \varepsilon M, \quad \forall z \in K(z_0, \rho), \forall n \geq n_0,$$

pa zaključujemo

$$f_n^{(k)}|_{K(z_0,\rho)} \rightrightarrows f^{(k)}|_{K(z_0,\rho)}.$$

Zbog proizvoljnosti od z_0 slijedi

$$f_n^{(k)} \xrightarrow{L.U.} f^{(k)}. \qquad \square$$

U daljnjem ćemo se prvenstveno baviti redovima funkcija. Ako je (f_n) niz funkcija definiranih na Ω, kažemo da red $\sum_n f_n$ konvergira lokalno uniformno na Ω ako niz parcijalnih suma

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

konvergira lokalno uniformno na Ω.

U daljnjem ćemo se prvenstveno baviti redovima funkcija. Ako je (f_n) niz funkcija definiranih na Ω, kažemo da red $\sum_n f_n$ konvergira lokalno uniformno na Ω ako niz parcijalnih suma

$$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

konvergira lokalno uniformno na Ω.

Analogno se definira obična ili uniformna konvergencija reda funkcija.

Teorem (Weierstrassov M-test)

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz funkcija. Neka je $(M_n)_n$, $M_n \geq 0$, niz brojeva takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$.

Teorem (Weierstrassov M-test)

Neka je $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ niz funkcija. Neka je $(M_n)_n$, $M_n \geq 0$, niz brojeva takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$.

Ako vrijedi

$$|f_n(z)| \leq M_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \Omega,$$

tada red funkcija $\sum f_n$ konvergira apsolutno i uniformno na Ω.

Dokaz

Za svaki $z \in \Omega$, red $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ ima pozitivne članove, koji su manji od odgovarajućih članova konvergentnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$.

Dokaz

Za svaki $z \in \Omega$, red $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ ima pozitivne članove, koji su manji od odgovarajućih članova konvergentnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$.

Zato prema kriteriju uspoređivanja slijedi da red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ apsolutno konvergira za svaki $z \in \Omega$.

Dokaz

Za svaki $z \in \Omega$, red $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ ima pozitivne članove, koji su manji od odgovarajućih članova konvergentnog reda $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$.

Zato prema kriteriju uspoređivanja slijedi da red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ apsolutno konvergira za svaki $z \in \Omega$.

Slijedi da za svaki $z \in \Omega$ red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ (obično) konvergira, pa možemo definirati funkciju

$$f : \Omega \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z).$$

Iz konvergencije reda $\sum_n M_n$ slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum_{k>n} M_k < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$.

Iz konvergencije reda $\sum_n M_n$ slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum_{k>n} M_k < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$.

Tada za sve $z \in \Omega$ i sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

Iz konvergencije reda $\sum_n M_n$ slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum_{k>n} M_k < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$.

Tada za sve $z \in \Omega$ i sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon.$$

To povlači da red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ uniformno konvergira prema funkciji f. $\square$

Redovi potencija

Red potencija je red oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \tag{6}$$

gdje su a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$, z i z_0 kompleksni brojevi.

Redovi potencija

Red potencija je red oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{6}$$

gdje su a_n ($n \in \mathbb{N}_0$), z i z_0 kompleksni brojevi.

Pri tome z smatramo varijabilnim, a z_0 fiksiranim. Brojeve a_n zovemo koeficijentima reda (6).

Prvo je pitanje za koje $z \in \mathbb{C}$ red (6) konvergira. Kad odgovorimo na to pitanje, onda ćemo proučavati funkciju f definiranu sa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

Prvo je pitanje za koje $z \in \mathbb{C}$ red (6) konvergira. Kad odgovorimo na to pitanje, onda ćemo proučavati funkciju f definiranu sa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Posebno, vidjet ćemo da ako red (6) konvergira na nekom otvorenom krugu, onda je funkcija $f(z)$ holomorfna na tom krugu.

Prvo je pitanje za koje $z \in \mathbb{C}$ red (6) konvergira. Kad odgovorimo na to pitanje, onda ćemo proučavati funkciju f definiranu sa $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Posebno, vidjet ćemo da ako red (6) konvergira na nekom otvorenom krugu, onda je funkcija $f(z)$ holomorfna na tom krugu.

Moguće je da red (6) konvergira samo za $z = z_0$. Međutim, ako to nije slučaj, onda sljedeća lema povlači da red konvergira, i to lokalno uniformno, na nekom otvorenom krugu oko z_0.

Abelova lema

Neka je $z' \neq z_0$. Ako red brojeva $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z' - z_0)^n$ konvergira, tada red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $K(z_0, r)$, gdje je $r = |z' - z_0|$.

Abelova lema

Neka je $z' \neq z_0$. Ako red brojeva $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z' - z_0)^n$ konvergira, tada red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $K(z_0, r)$, gdje je $r = |z' - z_0|$.

Dokaz. Nužan uvjet konvergencije reda brojeva $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z' - z_0)^n$ povlači da je $\lim_{n\to\infty} a_n(z' - z_0)^n = 0$.

Abelova lema

Neka je $z' \neq z_0$. Ako red brojeva $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z' - z_0)^n$ konvergira, tada red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergira apsolutno i lokalno uniformno na $K(z_0, r)$, gdje je $r = |z' - z_0|$.

Dokaz. Nužan uvjet konvergencije reda brojeva $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z' - z_0)^n$ povlači da je $\lim_{n\to\infty} a_n(z' - z_0)^n = 0$.

Zbog toga je niz $(a_n(z' - z_0)^n)_n$ ograničen, pa postoji $M > 0$ tako da je $|a_n(z' - z_0)^n| < M$ za sve $n \geq 0$.

Neka je $\rho \in (0, r)$. Tada za sve $z \in K(z_0, \rho)$ i za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n(z' - z_0)^n| \left(\frac{|z - z_0|}{|z' - z_0|} \right)^n < M \left(\frac{\rho}{r} \right)^n .$$

Neka je $\rho \in (0, r)$. Tada za sve $z \in K(z_0, \rho)$ i za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n(z' - z_0)^n| \left(\frac{|z - z_0|}{|z' - z_0|} \right)^n < M \left(\frac{\rho}{r} \right)^n .$$

Označimo $M_n = M \left(\frac{\rho}{r}\right)^n, n \geq 0$.

Neka je $\rho \in (0, r)$. Tada za sve $z \in K(z_0, \rho)$ i za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n(z' - z_0)^n| \left(\frac{|z - z_0|}{|z' - z_0|} \right)^n < M \left(\frac{\rho}{r} \right)^n .$$

Označimo $M_n = M \left(\frac{\rho}{r} \right)^n, n \geq 0$.

Tada je $\sum_n M_n$ geometrijski red kvocijenta manjeg od 1, pa taj red konvergira.

Neka je $\rho \in (0, r)$. Tada za sve $z \in K(z_0, \rho)$ i za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n(z' - z_0)^n| \left(\frac{|z - z_0|}{|z' - z_0|} \right)^n < M \left(\frac{\rho}{r} \right)^n.$$

Označimo $M_n = M \left(\frac{\rho}{r} \right)^n, n \geq 0$.

Tada je $\sum_n M_n$ geometrijski red kvocijenta manjeg od 1, pa taj red konvergira.

Prema Weierstrassovom M-testu red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergira uniformno na $K(z_0, \rho)$.

Neka je $\rho \in (0, r)$. Tada za sve $z \in K(z_0, \rho)$ i za sve $n \geq 0$ vrijedi

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n(z' - z_0)^n| \left(\frac{|z - z_0|}{|z' - z_0|} \right)^n < M \left(\frac{\rho}{r} \right)^n .$$

Označimo $M_n = M \left(\frac{\rho}{r} \right)^n, n \geq 0$.

Tada je $\sum_n M_n$ geometrijski red kvocijenta manjeg od 1, pa taj red konvergira.

Prema Weierstrassovom M-testu red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergira uniformno na $K(z_0, \rho)$.

To vrijedi za svaki $\rho \in (0, r)$.

Neka je $z \in K(z_0, r)$. Tada postoji $\rho \in (0, r)$ takav da je $z \in K(z_0, \rho)$.

Neka je $z \in K(z_0, r)$. Tada postoji $\rho \in (0, r)$ takav da je $z \in K(z_0, \rho)$.

Neka je $\delta > 0$ takav da je $K(z, \delta) \subseteq K(z_0, \rho)$.

Neka je $z \in K(z_0, r)$. Tada postoji $\rho \in (0, r)$ takav da je $z \in K(z_0, \rho)$.

Neka je $\delta > 0$ takav da je $K(z, \delta) \subseteq K(z_0, \rho)$.

Prema dokazanom, red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ konvergira uniformno na $K(z_0, \rho)$, pa onda i na $K(z, \delta)$. Slijedi tvrdnja. $\square$

Abelova lema povlači da skup svih z za koje red (6) konvergira uvijek sadrži maksimalan otvoren krug $K(z_0, r)$ oko z_0, i možda još i neke točke ruba tog kruga.

Abelova lema povlači da skup svih z za koje red (6) konvergira uvijek sadrži maksimalan otvoren krug $K(z_0, r)$ oko z_0, i možda još i neke točke ruba tog kruga.

Pri tome prazan skup i cijeli $\mathbb{C}$ također smatramo otvorenim krugovima: prazan skup je otvoren krug radijusa 0, a $\mathbb{C}$ je otvoren krug radijusa $+\infty$.

Abelova lema povlači da skup svih z za koje red (6) konvergira uvijek sadrži maksimalan otvoren krug $K(z_0, r)$ oko z_0, i možda još i neke točke ruba tog kruga.

Pri tome prazan skup i cijeli $\mathbb{C}$ također smatramo otvorenim krugovima: prazan skup je otvoren krug radijusa 0, a $\mathbb{C}$ je otvoren krug radijusa $+\infty$.

Kako nas zanimaju samo otvorene domene, za domenu funkcije zadane redom (6) uzimamo otvoren krug $K(z_0, r)$.

Abelova lema povlači da skup svih z za koje red (6) konvergira uvijek sadrži maksimalan otvoren krug $K(z_0, r)$ oko z_0, i možda još i neke točke ruba tog kruga.

Pri tome prazan skup i cijeli $\mathbb{C}$ također smatramo otvorenim krugovima: prazan skup je otvoren krug radijusa 0, a $\mathbb{C}$ je otvoren krug radijusa $+\infty$.

Kako nas zanimaju samo otvorene domene, za domenu funkcije zadane redom (6) uzimamo otvoren krug $K(z_0, r)$.

Sljedeći ćemo put vidjeti kako se radijus tog "kruga konvergencije" može izraziti pomoću koeficijenata a_n.